МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. ДЕМ'ЯНЧУКА

Букеєв Б. О.

Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО

Імітація незалежних змінних X

Модель ПГБ-61 № 3

Науковий керівник:
Літнарович Р. М., доцент,
кандидат технічних наук

Рівне 2006

УДК 629.123.053.12

Букеєв Б. О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло.Імітація незалежних змінних Х. Модель ПГБ-61 №3.Науковий керівник Р.М.Літнарович, МЕГУ Рівне, 2006,– 28 с.

Рецензент: В. Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор.

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

© Букеєв Б.О.2006

ЗМІСТ

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті

4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарович Р. М. Основи математичної статистики у психології. Навч. пос. Частина 3. МЕГУ, Рівне, -48с.
8. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976,-192с.
9. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005,-2668с.
10. Рего К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособиє. –К.:Техніка, 1987,-126с.
11. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966,-503с
12. Савельєв И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989,-352с
13. Савельєв И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989,-464с
14. Савельєв И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, -304с
15. Ситніков О. П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003,-48с
16. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання,1996, -39с.
17. Топографо-геодезическиє термины: справочник/Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989,-261с.
18. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966,-52с
19. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелєва та ін. – К.: Либідь, 1993,-224с.

$M = 0{,}000012261\varphi^3 - 0{,}001451013\varphi^2 + 0{,}028833495\varphi + 8{,}799583312$

2. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом
3. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги при розрахунку за виведеною формулою становить 0,0035637 значень геомагнітного моменту.
4. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнтів
m_a = 6,656E-8 · E22 = 6,656E14 ам^2,
m_b = 9,135E-6 · E22 = 9,135E16 ам^2,
m_c = 3,406E-4 · E22 = 3,406E18 ам^2,
m_d = 0,0033 · E22 = 3,318E19 ам^2.
5. Вперше проведені дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від геомагнітної широти методом статистичних випробувань Монте Карло.
6. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
7. Дослідження виконані на основі побудованої істинної моделі шляхом генерування випадкових чисел, приведення їх до нормованих похибок, які приймаються як істинні похибки побудови спотвореної моделі і її зрівноваження по способу найменших квадратів.
8. Розроблена методика дає можливість робити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці земної кулі.
9. Робота буде корисною студентам і аспірантам, які виконують дослідження земного магнетизму, спеціалістам наук про Землю.

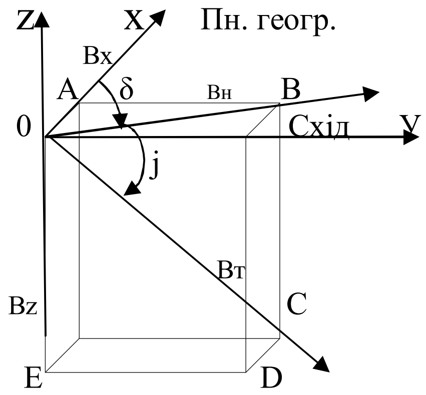
Література

1. Бронштейн И. Н., Семендаев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980,-975с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по елементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.

електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\varphi_{маг.\ екв.}=0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.



Проекції B_Z і B_H індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_Z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \varphi_M \qquad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_H = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \varphi_M \qquad (1.2)$$

де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_M – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \qquad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6}\left(\sin^2\varphi_м + \frac{\cos^2\varphi_м}{4}\right)} ;$$

або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3}\sqrt{\frac{4\sin^2\varphi_м + \cos^2\varphi_м}{4}} .$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, а $4\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 3\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3}\sqrt{3\sin^2\varphi + 1} \qquad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)

$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu\sqrt{3\sin^2\varphi_м + 1}} \qquad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{екв.}$= 0,34 ерстеда [3,– с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідуючу пропорцію

Напруженості $1\frac{a}{м}$ відповідає $4\pi \cdot 10^{-3} e$,

$H_{екв.}$ дорівнює 0,34 e,

$$m = m' \cdot E^{22} = 3{,}5637E19$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = m\sqrt{\frac{1}{Pa}} = 3{,}5637E19 \cdot \sqrt{\frac{4{,}7219\mathrm{E}+11}{1{,}35353\mathrm{E}+21}} = 6{,}656\mathrm{E}14$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = m\sqrt{\frac{1}{Pb}} = 3{,}5637E19 \cdot \sqrt{\frac{8{,}89408\mathrm{E}+15}{1{,}35353E+21}} = 9{,}135\mathrm{E}16$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c

$$m_c = m\sqrt{\frac{1}{Pc}} = 3{,}5637E19 \cdot \sqrt{\frac{1{,}23631\mathrm{E}+19}{1{,}35353E+21}} = 3{,}406\mathrm{E}18$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = m\sqrt{\frac{1}{Pd}} = 3{,}5637E19 \cdot \sqrt{\frac{1{,}17351\mathrm{E}+21}{1{,}35353E+21}} = 3{,}318\mathrm{E}19$$

Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1.Вперше побудована ймовірніша модель залежності магнітного моменту Землі від геомагнітної широти у вигляді поліному третьої степені

Величина оберненої ваги

$$\frac{1}{Pd} = \frac{A_{44}}{\Delta} = 0{,}867$$

а $\sqrt{\frac{1}{Pd}} = 0{,}931128$

Підставляючи у виведену нами формулу (5.2) значення Х спотвореної моделі, отримаємо розрахункові значення $У_i^{'}$, які будуть відрізнятись від вихідних значень У.

Таблиця 6. Порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$Х_{спотв}$	$У_{іст}$	$У^{'}_{зрівн}$	$V = У_{іст} - У^{'}_{зрівн}$	V^2
1	0,06368	8,803	8,801	0,002	0,000004
2	11,30649	8,957	8,958	-0,001	0,000001
3	22,29743	8,851	8,857	-0,006	0,000036
4	33,71294	8,598	8,592	0,006	0,000036
5	45,12125	8,274	8,273	0,001	0,000001
6	56,36765	8,011	8,010	0,001	0,000001
7	67,56728	7,904	7,905	-0,001	0,000001
8	78,74892	8,057	8,059	-0,002	0,000004
9	84,28397	8,264	8,263	0,001	0,000001
10	89,90537	8,575	8,573	0,002	0,000004
n=10	489,375	84,294	84,291	0,003	0,000089

На основі виконаних розрахунків середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$m^{'} = \sqrt{\frac{[VV]}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}000089}{7}} = 0{,}0035637$$

звідки

$$Н_{екв.} = \frac{1\frac{а}{м}\cdot 0{,}34е}{4\pi\cdot 10^{-3}е} = 27{,}05634033\,\frac{а}{м}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$Н = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3}\sqrt{3\sin^2\varphi_м + 1} \qquad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi_м}}. \qquad (1.7)$$

Для полюса $Н_{пол.} = 0{,}66$ ерстед.
Тоді, при переході до системи СІ

$1\frac{а}{м}$ відповідає $4\pi\cdot 10^{-3}е$,

$Н_{пол.}$ дорівнює $0{,}66\ е$,

звідки

$$Н_{пол.} = \frac{1\frac{а}{м}\cdot 0{,}66е}{4\pi\cdot 10^{-3}е} = 52{,}52113122\,\frac{а}{м}.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$М_{пол.} = \frac{H_{пол.}\cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1+3\sin^2 90^0}}$$

Взявши радіус земної кулі R=6371000м, а $4\pi R^3$=$3{,}249620751\cdot10^{-21}$ м^3, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{екв.}=\frac{3{,}249620751\cdot10^{21}[\text{ì}^{\ 3}]\cdot27{,}05634033[\frac{\text{à}}{\text{ì}}]}{1}=8{,}792284498\cdot10^{22}\,\text{àì}^{\ 2}$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{пол.}=\frac{3{,}249620751\cdot10^{21}\cdot52{,}52113122}{2}=8{,}533687894\cdot10^{22}\,ам^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45^0, прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^0}=\frac{H_0+H_{90^0}}{2}=\frac{0{,}34e+0{,}66e}{2}=0{,}50e$$

Тоді

$$1\frac{a}{м}\ \text{відповідає}\ 4\pi\cdot10^{-3}e$$

$$H_{45^0}\ \text{дорівнює}\ 0{,}5\ e.$$

Звідки

$$H_{45^0}=\frac{1\frac{a}{м}\cdot0{,}5e}{4\pi\cdot10^{-3}e}=39{,}78873577\ \frac{a}{м}$$

Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45^0} буде

$$H_{45^0}=\frac{3{,}249620751\cdot10^{21}\,\text{ì}^{\ 3}\cdot39{,}78873577\frac{\text{à}}{\text{ì}}}{\sqrt{1+3\sin^2 45^0}}$$

H_{45^0} =$8{,}177542602\cdot10^{22}\,\text{àì}^{\ 2}$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22{,}5^0$

а $\sqrt{\frac{1}{Pa}}=1{,}86777e\text{-}5$

$$\grave{A}_{22}=\begin{vmatrix}1262330016053{,}75 & 190893475{,}1 & 2444067{,}873\\ 190893475{,}1 & 32928{,}31 & 489{,}375\\ 2444067{,}873 & 489{,}375 & 10\end{vmatrix}$$

$\grave{A}_{22}$ = 8,89408E+15

Величина оберненої ваги

$$\frac{1}{Pb}=\frac{A_{22}}{\Delta}=6{,}571e\text{-}6$$

а $\sqrt{\frac{1}{Pb}}=0{,}0025634$

$$\grave{A}_{33}=\begin{vmatrix}1{,}26233E+12 & 15369259610 & 2444067{,}873\\ 15369259610 & 190893475{,}1 & 32928{,}31\\ 2444067{,}873 & 32928{,}31 & 10\end{vmatrix}$$

$\grave{A}_{33}$ = 1,23631E+19

Величина оберненої ваги

$$\frac{1}{Pc}=\frac{A_{33}}{\Delta}=0{,}009134$$

а $\sqrt{\frac{1}{Pc}}=0{,}09557$

$$\grave{A}_{44}=\begin{vmatrix}1{,}26233E+12 & 15369259610 & 190893475{,}1\\ 15369259610 & 190893475{,}1 & 2444067{,}873\\ 190893475{,}1 & 2444067{,}873 & 32928{,}31\end{vmatrix}$$

$\grave{A}_{44}$ = 1,17351E+21

$$m_c = m\sqrt{\frac{A_{33}}{\Delta}} \qquad (7.9)$$

$$m_d = m\sqrt{\frac{A_{44}}{\Delta}} \qquad (7.10)$$

де m_a, m_b, m_c, m_d – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих a, b, c, d,
m – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-k}} \qquad (7.11)$$

У формулі (7.11) n – число значень факторних і результуючих ознак (X і У); k – степінь поліному.
В нашому випадку n = 10, k = 3.
V – різниця між істинним значенням У і вирахуваним значенням У' за формулою (5.2)

$$V_i = У_i - У_i^{'} \qquad (7.12)$$

A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів.
В нашому випадку отримаємо

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 190893475{,}1 & 2444067{,}873 & 32928{,}31 \\ 2444067{,}873 & 32928{,}31 & 489{,}375 \\ 32928{,}31 & 489{,}375 & 10 \end{vmatrix}$$

$\grave{A}_{11}$ = 4,7219E+11

Величина оберненої ваги

$$\frac{1}{Pa} = \frac{A_{11}}{\Delta} = 3{,}48858\text{e-}10$$

$$H_{22,5^0} = \frac{0{,}34e + 0{,}5e}{2} = 0{,}42\ e\ ,$$

для $\varphi_{маг.} = 67{,}5^0$

$$H_{67,5^0} = \frac{0{,}5e + 0{,}6e}{2} = 0{,}58e$$

для $\varphi_{маг.}\ 22{,}5^0$

$$1\frac{a}{м} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^0} \text{ дорівнює } 0{,}42\ e$$

звідки

$$H_{22,5^0} = \frac{1\frac{a}{м} \cdot 0{,}42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33{,}422538\frac{a}{м},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^0} = \frac{1\frac{a}{м} \cdot 0{,}58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46{,}1549335\ ам^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$M_{22,5^0} = \frac{3{,}249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33{,}42253805}{\sqrt{1+3\sin^2 22{,}5^0}} = 9{,}052956514 \cdot 10^{22}\ \frac{a}{м}$$

$$M_{67,5^0} = \frac{3{,}249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46{,}1549335}{\sqrt{1+3\sin^2 67{,}5^0}} 7{,}948506716 \cdot 10^{22}\ ам^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в табл. 1.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{маг.} = X$	$У = M = f(x)(\frac{a}{м})$
1	0,00	$8{,}79 \cdot 10^{22}$ *
2	11,25	$8{,}9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9{,}05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8{,}5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8{,}18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7{,}95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8{,}12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8{,}53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76{,}02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти.

На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного поля від широти, що не потребувало б знання магнітного момента і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного момента, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

* В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

7. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Представимо визначник Δ у слідуючому вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (7.1)$$

або $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$ (7.2)

де

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (7.3)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (7.4)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (7.5)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (7.6)$$

Середні квадратичні похибки визначаємих невідомих a, b, c, d розраховують за формулами

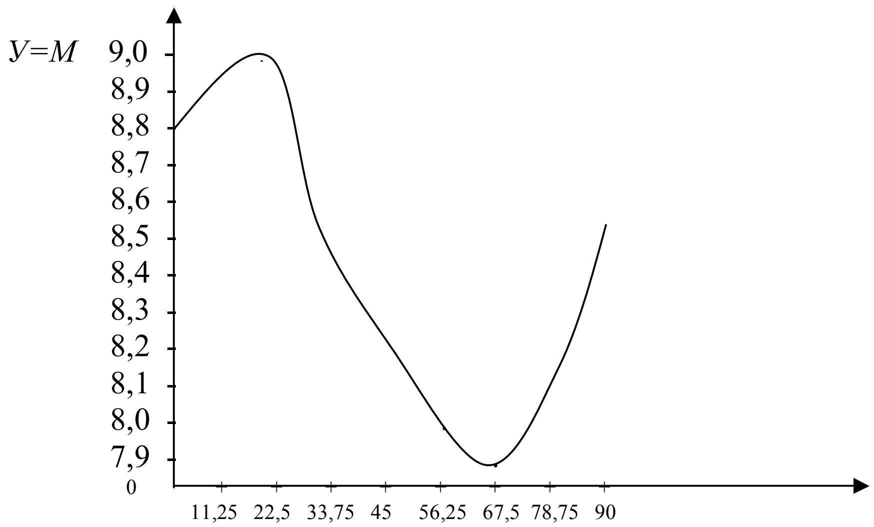
$$m_a = m\sqrt{\frac{A_{11}}{\Delta}} \quad (7.7)$$

$$m_b = m\sqrt{\frac{A_{22}}{\Delta}} \quad (7.8)$$

X^0]	y
244067,87	20187557,92
32928,31	271682,7
489,37498	4049,938789
10	84,294
8,799583312	
d	

Таким чином, на основі результатів контрольного розрахунку, приведених в таблиці 5, можна стверджувати, що розрахунок за виведеною формулою (5.2) забезпечує точність п'ять значущих цифр

Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти



Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах 0, $22{,}5^0$, 45^0, $67{,}5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22{,}5^0$ і $67{,}5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (1.8)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11{,}25^0$, $33{,}75^0$, $56{,}25^0$ і $78{,}75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови ймовірнішої моделі. Побудовану таким чином ймовірнішу модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому приймемо за істинну модель і генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО.

Побудувавши ймовірнішу модель по способу найменших квадратів, приймаємо її за істинну модель, адже у неї задовольняються всі умовні рівняння з одного боку, і встановлений функціональний зв'язок між параметрами Х і У – з другого.

В залежності від мети досліджень задаємося нормативним значенням середньої квадратичної похибки визначення геомагнітної широти Х=φ_{10} генеруємо випадкові числа, які б в цілому відповідали нормативній точності і спотворюємо істинну модель цими похибками.

Зрівноваживши спотворену модель, отримуємо математичну модель, робимо оцінку точності елементів зрівноваженої моделі і встановлюємо відповідність похибок визначення широти і похибок визначення магнітного моменту земної кулі.

Непарні моделі генерують середню квадратичну похибку $m = c = 0{,}05^{\,0}$, а парні – $m = c = 0{,}1^{0}$.

Сучасні канкулятори мають « вшиті » генератори для генерування випадкових чисел від 0 до 1. Але вони генерують числа тільки зі знаком « плюс ». Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому за істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо випадкових) чисел ξ_i, натиском клавіші RND,

Таким чином, на основі проведення досліджень магнітний момент земної кулі виражається формулою

$$y = M = 0{,}000012261X^3 - 0{,}001451013X^2 + 0{,}028833495X + 8{,}799583312 \quad (5.2)$$

де Х – геомагнітна широта пункту спостереження.

6. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулі (3.1) отримаємо слідуючі результати

Таблиця 5. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	X^3]	X^2]	X]
[X^3	1262330016053,75	15369259610	190893475,1
[X^2	15369259610	190893475,1	2444067,873
[X	190893475,1	2444067,873	32928,31
[X^0	2444067,873	32928,31	489,37498
	0,000012261	-0,001451013	0,028833495
	a	b	c

При цьому, коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -0{,}001451013$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1262330016053{,}75 & 15369259610 & 20187557{,}92 & 2444067{,}873 \\ 15369259610 & 190893475{,}1 & 271682{,}7 & 32928{,}31 \\ 190893475{,}1 & 2444067{,}873 & 4049{,}938789 & 489{,}37498 \\ 2444067{,}873 & 32928{,}31 & 84{,}294 & 10 \end{vmatrix}$$

Δ_3 = 3,9027E+19

Коефіцієнт c при x буде

$$C = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0{,}028833495$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1262330016053{,}75 & 15369259610 & 190893475{,}1 & 20187557{,}92 \\ 15369259610 & 190893475{,}1 & 2444067{,}873 & 271682{,}7 \\ 190893475{,}1 & 2444067{,}873 & 32928{,}31 & 4049{,}938789 \\ 2444067{,}873 & 32928{,}31 & 489{,}37498 & 84{,}294 \end{vmatrix}$$

Δ_4 = 1,19105E+22

При цьому, коефіцієнт d буде

$$d = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 8{,}799583312$$

розраховують середнє арифметичне генерованих псевдо випадкових чисел $\xi_{ср}$

$$\xi_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \cdot \xi_i}{n} \,, \qquad (2.1)$$

де n – число випадкових чисел.

2. Розраховують попередні значення істинних похибок Δ_i' за формулою

$$\Delta_i' = \xi_i - \xi_{ср} \qquad (2.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх значень істинних похибок за формулою

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \cdot \Delta_i'}{n}} \qquad (2.3)$$

4. Визначають коефіцієнт пропорційності К для визначення істинних похибок необхідної точності

$$К = \frac{C}{m_\Delta'}, \qquad (2.4)$$

де C – необхідна нормативна константа.

Так, наприклад, при $m_{\Delta_i}' = 0{,}283$ із необхідності побудови математичної моделі з точністю C=0,1, будемо мати

$$К_{0,1} = \frac{0{,}1}{0{,}283} = 0{,}353 \,,$$

а при C=0,05 , отримаємо

$$К_{0,05} = \frac{0{,}05}{0{,}283} = 0{,}177 \,.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta_i' К \qquad (2.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_Δ генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \cdot \Delta^2}{n}} \qquad (2.6)$$

і порівняння $m_{\Delta} = C$. (2.7)

Таблиця 2. Генерування псевдо випадкових чисел і розрахунок істинних похибок.

№	ξ_i	ξ_{cp}	Δ'_i	$\Delta'^{\,2}_i$	Δ_i	Δ^2_i
1	0,84	0,663	0,177	0,031329	0,06368	0,00406
2	0,82	0,663	0,157	0,024649	0,05649	0,00319
3	0,1	0,663	-0,563	0,316969	-0,20257	0,04103
4	0,56	0,663	-0,103	0,010609	-0,03706	0,00137
5	1	0,663	0,337	0,113569	0,12125	0,0147
6	0,99	0,663	0,327	0,106929	0,11765	0,01384
7	0,85	0,663	0,187	0,034969	0,06728	0,00453
8	0,66	0,663	-0,003	0,000009	-0,00108	0,000001
9	0,41	0,663	-0,253	0,064009	-0,09103	0,00829
10	0,4	0,663	-0,263	0,069169	-0,09463	0,00895
n=10	6,63	6,63	$\Sigma = 0$	0,77221	$\Sigma = 0$	0,09996

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{0,77221}{10}} = 0,2779$$

Коефіцієнт пропорційності

$$K = \frac{0,1}{0,2779} = 0,3598$$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю C = 0,1

$$m_{\Delta_{0,1}} = \sqrt{\frac{0,09996}{10}} = 0,0999 = 0,1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1262330016053,75 & 15369259610 & 190893475,1 & 2444067,873 \\ 15369259610 & 190893475,1 & 2444067,873 & 32928,31 \\ 190893475,1 & 2444067,873 & 32928,31 & 489,37498 \\ 2444067,873 & 32928,31 & 489,37498 & 10 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 1,35353E+21$

Підставляючи значення вільних членів приведені у стовпчику F почергово у стовпчики A, B, C, D, знаходять визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20187557,92 & 15369259610 & 190893475,1 & 2444067,873 \\ 271682,7 & 190893475,1 & 2444067,873 & 32928,31 \\ 4049,938789 & 2444067,873 & 32928,31 & 489,37498 \\ 84,294 & 32928,31 & 489,37498 & 10 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = 1,65959E+16$

Тоді значення коефіцієнта a при x^3 буде

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,000012261$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1262330016053,75 & 20187557,92 & 190893475,1 & 2444067,873 \\ 15369259610 & 271682,7 & 2444067,873 & 32928,31 \\ 190893475,1 & 4049,938789 & 32928,31 & 489,37498 \\ 2444067,873 & 84,294 & 489,37498 & 10 \end{vmatrix}$$

$\Delta_2 = -1,96399E+18$

5. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера.

Рішення нормальних рівнянь виконується на персональному комп'ютері в редакторі Microsoft Office Excel. Набирається визначник Δ в слідуючих чарунках

	A	B	C	D	E	F
1						
2	$[x^6]$	[х**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**]	$[x^4]$	$[x^3]$		$[x^3 У]$
3	[х**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**]	$[x^4]$	$[x^3]$	$[x^2]$		$[x^2 У]$
4	$[x^4]$	$[x^3]$	$[x^2]$	$[x]$		[хУ]
5	$[x^3]$	$[x^2]$	$[x]$	n		[У]

В довільній клітинці записується формула розрахунку визначника

= МОПРЕД (A2:D5) ENTER

і отримують результат.

При цьому букви МОПРЕД набирають російською мовою, після чого натиском клавіші Ctrl + Shift переходять на англійську мову і букви в дужках набирають на англійській мові.

В нашому випадку отримаємо:

Таблиця 3. Побудова спотвореної моделі

№	$X_{іст.}$	$У_{іст.}$	Δ_i	$X_{спотв.}$
1	$0{,}00^0$	8,803	0,06368	0,06368
2	$11{,}25^0$	8,957	0,05649	11,30649
3	$22{,}5^0$	8,851	-0,20257	22,29743
4	$33{,}75^0$	8,598	-0,03706	33,71294
5	45^0	8,274	0,12125	45,12125
6	$56{,}25^0$	8,011	0,11765	56,36765
7	$67{,}5^0$	7,904	0,06728	67,56728
8	$78{,}75^0$	8,057	-0,00108	78,74892
9	$84{,}375^0$	8,264	-0,09103	84,28397
10	90^0	8,575	-0,09463	89,90537
n=10	489,375	84,294	$\Sigma = 0$	489,375

Контролем розрахунку $X_{спотв.}$ служить рівність

$$\sum_{i=1}^{n} X_{іст.} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} X_{спотв.}$$

В нашому випадку 489,375 + 0 = 489,375.

3. Представлення системи нормальних рівнянь.

Для поліному третього порядку (1.8), згідно теорії способу найменших квадратів, система нормальних рівнянь буде:

$a\,[x^6] + b\,[x^5] + c\,[x^4] + d\,[x^3] - [x^3 y] = 0,$

$a\,[x^5] + b\,[x^4] + c\,[x^3] + d\,[x^2] - [x^2 y] = 0,$

$a\,[x^4] + b\,[x^3] + c\,[x^2] + d\,[x] - [xy] = 0,$

$a\,[x^3] + b\,[x^2] + c\,[x] + d\,n - [y] = 0,$

де знаком [] позначені суми у символах Гауса.

4. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Табл. 4 Знаходження коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$X_{спотв}$	$У_{іст}$	X^0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
1	0,06368	8,803	1	0,004055	0,000258	0,000016	0,000001	0,00000006
2	11,30649	8,957	1	127,836716	1445,38455	16342,225972	184773,21453	2089136,50235
3	22,29743	8,851	1	497,175385	11085,733345	247183,36326	5511553,7394	122893483,696
4	33,71294	8,598	1	1136,562323	38316,8574	1291773,9145	43549496,4736	1468181561,645
5	45,12125	8,274	1	2035,927202	91863,58026	4144999,571	187027561,89	8438917376,95
6	56,36765	8,011	1	3177,311967	179097,6089	10095311,334	569048975,9	32075953507,7
7	67,56728	7,904	1	4565,337327	308467,4255	20842304,9075	1408257851,53	95152152566,46
8	78,74892	8,057	1	6201,3924	488352,9541	38457267,712	3028468298,49	238488607760,2
9	84,28397	8,264	1	7103,787599	598735,4209	50463798,25	4253289257,9	358484104214,7
10	89,90537	8,575	1	8082,975555	726702,908	65334493,82	5873921840,78	528097116445,9
n=10	489,375	84,294	10	32928,31	2444067,87	190893475,1	1536925961	1262330016053,75

№	$S=x+x^0+x^2+x^3-y$	$X^3У$	X^3S	$X^2У$	X^2S	XУ	XS
1	-7,735	0,002271	-0,001996	0,035696	-0,0314	0,560575	-0,4926
2	1576,57	12946,3094	2278749,9	1145,0335	201543,53	101,27223	17825,47
3	11597,355	98119,8258	128565185	4400,499	5765919,437	197,35455	258591,2
4	39479,535	329448,3399	1512731712,8	8772,163	44870952	289,8639	1330971,19
5	93937,355	760079,2631	8629421750,5	16845,2617	191249616,33	373,3332	4238570,88
6	182324,278	1434750,9449	32653842234,2	25453,446	579301110,36	451,5612	10277191,1
7	313093,426	2438126,5312	96579123059,2	36084,426	1429377104,6	534,0518	21154871,2
8	494626,038	3934659,7512	241552086832,1	49964,6186	3067370153,4	634,48	38951266,3
9	605916,228	4947949,5183	362783507801,7	58705,7	4304300186,5	696,5227	51069025,18
10	734868,214	6231477,4361	534030868110,6	69311,5154	5939921809,9	770,9385	66068598,68
n=10	2477411,264	20187557,92	1277872425435,998	271682,7	15562358396	4049,9387	193366911,7